Recibido: 20 de abril de 2016 / Aprobado: 29 de abril de 2016

# El concepto de probabilidad en un grupo de estudiantes de Ingeniería

## *The concept of probability in a group of students in Engineering*

Salvador Hernández Vaca

**Resumen**
Este trabajo surge al realizar observaciones durante una clase semestral de 60 horas que impartimos a un grupo escolar de ingeniería en la Universidad Autónoma de Sinaloa. Documentamos la problemática que tuvieron los estudiantes del tercer semestre de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Sinaloa al estudiar los conceptos curriculares de probabilidad y probabilidad condicional. Entre los resultados, destacamos la ausencia de argumentos en las respuestas, así como las intuiciones incorrectas en relación con la probabilidad con la que llegan los alumnos.
**Palabras clave:** Conocimiento, creencia, evento determinístico y aleatorio, eventos equiprobables, probabilidad y probabilidad condicional.

**Abstract**
This work comes from making observations during a 60-hour semester class that we teach to a group of engineering school at the Universidad Autónoma de Sinaloa. We documented the problems that students had the third semester students of the Faculty of Engineering of the Universidad Autónoma de Sinaloa, in studying the curriculum concepts of probability and conditional probability. Among the results we highlight the absence of arguments in the responses, as well as incorrect intuitions regarding the probability with which students arrive.
**Key words:** Knowledge, belief, deterministic and random event, equiprobable events, probability and conditional probability.

## Introducción

La probabilidad y la probabilidad condicional son conceptos teóricos básicos para el estudio de los sucesos aleatorios, documentados ampliamente por J. M. Shaughnessy (1992, 2007), C. Batanero (2001), M. R. Wilhelmi (2004), C. Díaz y De la Fuente (2005), J. J. Ortiz, N. Mohamed y C. Batanero (2006). Dichas investigaciones reflejan que los conceptos de probabilidad y probabilidad condicional están fuertemente ligados a creencias, errores y concepciones acerca del conocimiento matemático.

Desde la década pasada, a partir del Acuerdo Número 592, por el que se articula la educación básica en nuestro país (Sep, 2011), junto con la obligatoriedad de la educación media básica (secundaria) y hasta la fecha, la probabilidad y la estadística en el currículo de educación básica ha sido prioridad en la escuela mexicana (las autoridades educativas de nuestro país prefieren llamarle Manejo de la Información). Con el pasar de los años, la probabilidad y la estadística han ganado espacio en secundaria. Por ejemplo, la presente administración federal ha planteado un programa que ha sido la guía y el eje rector de todos los programas educativos vigentes en el presente sexenio; me refiero al *Programa Sectorial de la Educación 2013-2018*, del que se desprende la Reforma Integral de la Educación Básica (Sep, 2011), afirmando que debemos concretar una reforma integral de la educación básica, centrada en la adopción de un modelo educativo basado en competencias y que responda a las necesidades de desarrollo de México en el siglo veintiuno.

En este sentido, en el mismo programa de la Reforma Integral de Educación Básica se define lo que se va a entender por competencia: una competencia implica un saber hacer (habilidades) con saber (conocimiento), así como la valoración de las consecuencias del impacto de ese hacer (valores y actitudes). En otras palabras, la manifestación de una competencia revela la puesta en juego de conocimientos, habilidades, actitudes y valores para lograr propósitos en un contexto.

Se afirma también que los contenidos que se estudian en la educación primaria se han organizado en tres ejes temáticos, coincidentes con los de secundaria: sentido numérico y pensamiento algebraico; forma, espacio y medida*,* y manejo de la información. Más adelante precisa: mediante las actividades que se plantean en el eje *Manejo de la información,* los alumnos tendrán la posibilidad de formular preguntas y recabar, organizar, analizar, interpretar y presentar la información que da respuesta a esas preguntas. Utilizar recursos tecnológicos cuando resulten apropiados. Vincular el estudio de las matemáticas con el de otras asignaturas, así como que sepan reconocer experimentos aleatorios comunes, sus espacios muéstrales y una idea intuitiva de su probabilidad.

En tanto que ya el contenido específico del programa para secundaria (Sep, 2006) observa que los estudiantes resuelvan problemas que implican calcular la probabilidad de dos eventos independientes, y resuelvan problemas que implican calcular la probabilidad de dos eventos mutuamente excluyentes, siendo los temas de observancia general para todo el país en la escuela secundaria. Ocurre lo mismo para el bachillerato. En el Acuerdo número 442 por el que se establece el Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad, se le da forma a la Reforma Integral de Educación Media Superior (RIEMS), en donde hay un eje rector que aglutina un estándar de temas, aunque cada subsistema tiene los propios y cada universidad con bachillerato tiene sus particularidades. No obstante, fuimos explícitos en los contenidos de la secundaria porque estos mismos son básicamente los temas a tratar en bachillerato. Varía sólo cuantitativamente, pues algunos programas de bachillerato tienen probabilidad uno o dos semestres; más aún, la escuela de ingeniería donde se impartió el curso retoma los temas de probabilidad y probabilidad condicional.

En el terreno internacional, los estándares que propone la Nacional Council Teacher of Mathematics (NCTM, 2000), respecto al aprendizaje y la enseñanza de la probabilidad, enfatiza que para los estándares 6-8 –lo que equivale a la educación secundaria en nuestro país– se deben observar lo siguientes temas:

> [...] encontrar, usar e interpretar medidas de tendencia central y de dispersión, incluyendo media y rango intercuartil. Seleccionar, crear y usar apropiadas representaciones gráficas de los datos, incluyendo histogramas, diagrama de árbol, gráfica de caja de brazos, y scatterplots [...] Entendimiento y uso

> apropiado de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes[...] Entendimiento básico de la probabilidad para hacer conjeturas acerca de experimentos y hacer simulaciones (p.248).

Lo cual coincide con el currículo matemático aprobado por la Sep. Más aún, la NCTM amplía en los estándares de 9-12, lo que equivale a la educación de bachillerato en nuestro país. Los conceptos probabilísticos deben procurar «entender los conceptos de probabilidad condicional y evento independiente» (p.324), que también coincide con los contenidos de las distintas modalidades del bachillerato mexicano.

Sabemos que hay una enorme diferencia en lo que se plasma en los contenidos curriculares de la escuela mexicana o de cualquier escuela del mundo (Clemens, 2007:36). Así, encontramos básicamente que el currículo es un conjunto específico de materiales instruccionales, de recurso ordenado para apoyar los grados desde primaria hasta licenciatura, pero puede ser potencial o implementado; puede ser también un currículo ideal, adoptado, implementado, alcanzado o probado.

Lo importante en este punto es la indicación curricular del tratamiento y manejo de la información y la inclusión de las nociones de probabilidad desde la educación básica, pues los conceptos de probabilidad son imprescindibles en las aplicaciones de estadística y para la toma de decisiones acertadas en situaciones de incertidumbre. Por ello, el propósito en este trabajo es presentar la clasificación de las principales dificultades y errores que cometieron en este tipo de razonamientos alumnos de segundo grado de la Licenciatura en Ingeniería Civil. Opinamos que la información puede ser de interés para los profesores de Probabilidad y Estadística, pues los problemas que utilizamos se pueden usar para diagnosticar los conocimientos y razonamientos previos de sus alumnos o ser insumo para la enseñanza del tema.

## Materiales y métodos

La muestra fue de 27 alumnos, edad promedio de 20 años, tercer semestre de la Licenciatura en Ingeniería Civil, turno vespertino, universidad pública, estudiantes de tiempo completo. Presentamos el análisis del cuestionario que se les formuló a los alumnos después de 30 horas de un curso sobre probabilidad y estadística. Dicho curso tuvo una duración de 60 horas. El cuestionario consistió en cinco problemas para evaluar los conocimientos y razonamientos de los alumnos a mitad del curso. Al aplicar el cuestionario, no hubo tiempo límite para resolver y entregar los problemas. Cabe señalar que, antes de tres horas de haber iniciado a resolver los problemas todos los estudiantes entregaron su examen. Es importante puntear que se les dejó sacar apuntes, libros, calculadora o computadora. Asimismo, cada uno de los estudiantes estuvo sentado en una mesa individual.

## Resultados y discusión

Analizaremos los cinco problemas que se plantearon en el cuestionario y comentaremos cada uno en lo individual para, posteriormente, englobar un comentario integral.

*Problema 1.* Aclare, por favor, en el terreno de la probabilidad y la estadística, si las dos afirmaciones siguientes son equivalentes, o si una afirmación implica a la otra, o no hay relación entre sí. Sean A y B dos conjuntos distintos del vacío. Primera afirmación: «los conjuntos A y B son mutuamente excluyentes», en tanto que la Segunda afirmación es: «los conjuntos A y B son mutuamente independientes».

*Análisis del problema 1:*
Tomando los conceptos del libro de texto (Hines, Montgomery et al., 2006:26-27), en el curso se enfatizó acerca de las definiciones y se trataron ejemplos de que dos eventos A y B, distintos del vacío, son mutuamente excluyentes si, $A \cap B = \emptyset$, por lo que $P(A/B)=0$ y $P(B/A)=0$.

En tanto que dos eventos A y B, distintos del vacío, son mutuamente independientes si y sólo si, $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ y que además como una consecuencia inmediata tenemos: $P(A/B) = P(A)$ y $P(B/A) = P(B)$.

Desde el punto de vista matemático, esas definiciones no tienen dificultad porque no requieren de cálculos sofisticados, pero, desde la didáctica de la matemática, sí son definiciones difíciles porque es complicado saber en un problema cuando dos sucesos son independientes; es lo que Maury (1986) llamó «definición intuitiva *a priori* de independencia».

Sólo dos alumnos acertaron a responder correctamente, de acuerdo con los criterios de la probabilidad, razonando según el texto del curso. En tanto que los 25 alumnos restantes respondieron argumentando que si $A \cap B = \emptyset$ entonces son independientes y viceversa; por tanto, se sigue que $P(A/B) = P(A)$ y $P(B/A) = P(B)$, sosteniendo que ser mutuamente independientes equivale a ser mutuamente excluyentes. Estos estudiantes respondieron con una fuerte carga cultural del binomio causa-efecto. Argumentaron que los conceptos «excluyentes e independientes» son mutuamente causa y efecto uno del otro porque cotidianamente construimos nuestro mundo sobre la base de las relaciones causa y efecto entre diferentes eventos. En la tabla 1 concentramos las respuestas al problema 1.

Tabla 1. Respuestas al problema 1

| Número de alumnos que responden correctamente de acuerdo con la definición de eventos mutuamente excluyentes y eventos mutuamente independientes y que además se promovió en el curso según el libro de texto. | Número de alumnos que responden incorrectamente de acuerdo con la definición de eventos mutuamente excluyentes y eventos mutuamente independientes, según el texto oficial del curso. |
|---|---|
| 2 | 25 |

De acuerdo con las respuestas de los alumnos, en la tabla 1 podemos observar que casi la totalidad de ellos respondió de manera incorrecta, pues, como señalan Díaz y De la Fuente (2005), es complicado en muchos casos saber si dos sucesos reales son independientes o no, ya que, como lo advierten las autoras, desde el punto de vista psicológico y didáctico son conceptos difíciles, especialmente al aplicarlos en la resolución de problemas y toma de decisiones.

*Problema* 2. Analiza los siguientes incisos y responde: ¿qué es más probable?

a. Suceso A: que una niña tenga los ojos negros si su madre tiene los ojos negros.
b. Suceso B: que una madre tenga los ojos negros si su hija tiene los ojos negros.
c. Los dos sucesos anteriores (A y B) son igualmente probables (Pollatsek et al., 1987).
   Favor de argumentar ampliamente su respuesta y escriba de manera correcta, en la medida de lo posible, sin faltas de ortografía.

*Análisis del problema 2*

La mayoría de los alumnos estuvo a favor del inciso a), argumentando razones genéticas más que probabilísticas, porque los estudiantes presentan argumentos como los siguientes: «la mamá le podría haber heredado los ojos negros por ser familiares»; «si la niña tiene los ojos negros es porque su mamá los tiene negros»; «es más probable que la niña tenga los ojos negros si su madre tiene los ojos negros porque la niña depende del color de ojos de la madre, tanto que la madre no depende del color de los ojos de su hija»; «el suceso más probable es porque tiene que ocurrir que su madre tenga los ojos negros para que ella los pueda tener»; «es más probable que una niña tenga los ojos negros si su madre tiene los ojos negros, ya que probablemente sea la madre quien le transmita ese rasgo»; «que la niña tenga los ojos negros porque la madre está primero que la hija».

Argumentos a favor del inciso (c) van en el mismo sentido: «los dos sucesos son igualmente probables porque tanto la madre como la hija pueden tener los ojos negros por genética»; «los dos sucesos son igualmente probables porque son equiprobables»; «los dos sucesos son igualmente probables porque la niña es dependiente de la madre en un 50%, el otro 50% del padre porque no se puede heredar»; «son equiprobables, ya que es la misma relación entre madre e hija y entre hija y madre»; «debido a la definición de Laplace son equiprobables; la probabilidad es del 50%, ya que tienen el mismo porcentaje de probabilidad». Para el inciso b) no hubo argumentos a favor. La tabla 2 muestra los tipos de respuesta y la cantidad de alumnos que respondió cada opción.

Tabla 2. Respuestas al problema 2

| opción del problema | número de respuestas |
|---|---|
| A favor del inciso a): suceso A: que una niña tenga los ojos negros si su madre tiene los ojos negros. | 14 |
| A favor del inciso b): suceso B: que una madre tenga los ojos negros si su hija tiene los ojos negros. | 0 (cero) |
| A favor del inciso c): los dos sucesos A y B son igualmente probables. | 4 |
| No hubo respuesta para argumentar ampliamente. | 8 |
| Más de una respuesta. | 1 |

De las respuestas en la tabla 2 observamos que las creencias de los alumnos predominan en sus argumentos, y esto, como lo señala Díaz y De la Fuente (2005), son intuiciones incorrectas, sesgos de razonamiento y errores de comprensión y aplicación de los conceptos de probabilidad (p.245). Esto lo podemos interpretar como una fuerte tendencia a pensar fenómenos deterministas, lo que de alguna manera obstruye el razonamiento condicional, que interviene para el tratamiento de la incertidumbre. Además, aunque los incisos a) y b) son matemáticamente equivalentes, psicológicamente no son percibidos así. Esto tiene que ver con los estudios que tratan de responder: ¿cuáles relaciones son más fuertes, las causales o las diagnósticas? Un ejemplo es el de Tversky y Kahneman (1982), quienes encontraron que para las personas era más probable que «una niña tenga los ojos de un color si su madre tiene los ojos de ese color» que «una madre tenga los ojos de un color si su hija tiene los ojos de ese color». En nuestro caso, los resultados coinciden con los autores, ya que un poco más de la mitad de los estudiantes participantes en el estudio respondió que era más probable el suceso señalado en el inciso a), y sólo contestaron correctamente cuatro de los participantes (alrededor del 15%), «ambos sucesos son igual de probables».

*Problema 3*. El problema 3 lo seccionamos en dos partes.

*Subproblema 3.A*. Se tienen dos urnas con las siguientes composiciones: la primera contiene dos esferas blancas y una negra, en tanto que la segunda contiene una esfera blanca y cinco esferas negras. Se pasa una esfera de la primera a la segunda y de ésta se extrae una esfera, que es blanca. Calcular la probabilidad de que la esfera transferida de la primera a la segunda urna haya sido negra.

*Subproblema 3.B*. Se tienen dos urnas con las siguientes composiciones: la primera contiene 200 esferas blancas y la segunda 700 esferas negras. Se pasan 25 esferas de la primera a la segunda urna. Se mezclan las esferas de la segunda urna y se pasan 25 esferas de la segunda a la primera urna, ¿hay más esferas blancas en la segunda urna que negras en la primera?

a. ¿Qué similitudes o diferencias observa usted entre los subproblemas 3.A y 3.B?
b. ¿Los dos problemas «piden» un estudio de probabilidad o determinístico? Al resolver los problemas, se presentaron argumentos como los siguientes:

*Análisis del problema 3*

Respecto al primer inciso a), hubo uniformidad al observar la Categoría de Similitudes respondieron que en ambos casos se trata con «esferas ya sean blancas o negras», se observa la «presencia de urnas en ambos casos», que en «los dos subproblemas se extrae una esfera blanca de la urna 1», que «en ambos casos se sacan esferas», «que se pasan y se regresan esferas», en «los dos casos se usan teoremas por más sencillos que se vean», «en los dos hay preguntas», «nos piden lo mismo».

Para la Categoría de Diferencias: «en las urnas primeras hay más blancas», «no hay diferencia porque no te pide el mismo problema», «hay más esferas en el segundo problema», «la diferencia de esferas». Mientras que para la Categorías entre Similitudes y Diferencias: «los problemas son casi parecidos», «las probabilidades casi son las mismas».

Respecto al inciso (b) «Si en el primero se necesita una probabilidad, mientras que en el segundo subproblema se requieren dos probabilidades», «en ambos casos no se pide un estudio de probabilidad», «en los dos subproblemas se tiene que sacar la probabilidad», «el primero pide un estudio de probabilidad, el segundo un estudio de lógica», «el segundo subproblema es sobre lógica o sentido común, el primero tiene probabilidad», «el primero se pide una probabilidad y es más fácil obtener el resultado, pues se engloba a la probabilidad de que ocurra un suceso y es más directo sacarlo». En resumen, la tabla 3 muestra las respuestas del problema.

Tabla 3. Respuestas del problema 3

| Opción de respuesta | Número de estudiantes que observan un fenómeno probabilístico en el 1er subproblema. Y un fenómeno determinístico en el 2do subproblema. | Número de estudiantes que observan un fenómeno determinístico en el 1er subproblema. Y no deciden o no hay respuesta en el 2do subproblema. | Número de estudiantes que en ambos sub-problemas (3.A y 3.B) observan un fenómeno probabilístico. | Número de estudiantes que no deciden o no hay respuesta. |
|---|---|---|---|---|
| Cantidad | 7 | 2 | 7 | 11 |

De la tabla 3 observamos que 20 alumnos, lo cual representa el 74% no supieron distinguir entre un fenómeno probabilístico y uno determinístico.

Lo que nos devela la laguna en el pensamiento variacional de los estudiantes, así como en el razonamiento condicional. Maury (1986) supone que la dificultad se debe al hecho de que los dos sucesos (blanco / negro) sean no equiprobables introduce un distractor que aumenta la dificultad de las tareas.

*Problema 4.* Un aparato sirve para identificar una cierta enfermedad. Si alguien está enfermo, hay un 90% de posibilidades de que la prueba sea positiva. Si no está enfermo hay todavía un 1% de posibilidades de que la prueba sea positiva. Aproximadamente, el 1% de la población está enferma. ¿Cuál es el porcentaje de personas que arrojaran una prueba positiva? (Gigerenzer, 1994).

*Análisis de problema 4*

Fue el problema que requirió de mayor esfuerzo cognitivo, también esperábamos que fuera el que más equivocaciones tuviera es importante señalar que quiénes acertaron a realizarlo lo hicieron vía una tabla de doble entrada, esta es la representación que sugieren Gigerenzer (1994) y Ojeda (1995), ellos afirman que la dificultad en la solución de problemas análogos al problema 4 desaparece cuando las preguntas se plantean en términos de frecuencias. Dicho precepto lo observamos en los cuatro estudiantes que conceptualmente resolvieron el problema; ellos básicamente atendieron las sugerencias que hicimos durante el curso al realizar problemas similares. A grandes rasgos, los estudiantes plantearon la solución del problema, asignando valores a una población, lo que podemos observar en la tabla 4.

Tabla 4. Ejemplo de tabla de doble entrada utilizada por algunos estudiantes para solucionar el problema 4.

| | POSITIVOS | NEGATIVOS | |
|---|---|---|---|
| Enfermos | 90%, (9 personas) | 1 persona | 10 |
| Sanos | 1% (10) personas | 980 personas | 990 |
| Total | 19 personas | 981 personas | 1000 |

En la tabla 4 observamos lo que Gigerenzer y Ojeda afirman en relación a que los estudiantes están mejor adaptados a resolver problemas bayesianos cuando la información y las preguntas planteados se dan en términos de frecuencias. En suma, la tabla 5 presenta las respuestas de los estudiantes al problema 4.

Tabla 5. Respuestas al problema 4

| Respuesta | Acertaron conceptualmente y con cálculos precisos | Acertaron conceptualmente, pero con cálculos No precisos | Esbozaron cálculos sin coherencia | No respondieron al problema, dejaron en blanco su respuesta |
|---|---|---|---|---|
| Cantidad | 1 | 3 | 10 | 13 |

El problema 5 fue planteado con la finalidad de observar algunas características cognitivas de los estudiantes al resolver problemas obviamente nos centramos en la propuesta de Polya G. y en la solución de problemas en el área de la estadística de Wild y Pfannkuch (1999).

*Problema 5*. Supóngase que un sistema aleatorio de una ronda de policía está ideado de tal manera que un policía puede visitar cierta localidad de su ronda y = 0, 1, 2, 3, ... veces en periodos de media hora, y que el sistema está arreglado de tal manera que pasa por cada localidad un promedio de una vez por periodo. Supóngase que la variable aleatoria «y» tiene una distribución de probabilidad de Poisson.

Calcule la probabilidad de que el policía no pase por cierta localidad durante un periodo de media hora. ¿Cuál es la probabilidad de que la visite una vez? ¿Dos veces? ¿Al menos una vez?

Responde a las siguientes preguntas:

a. Restablezca el problema en sus propias palabras.
b. Ubique todos los datos por separado, hágalos explícitos.
c. Encuentra subproblemas dentro del problema.

d. Plantea un problema análogo más accesible.
e. Restablece el problema original, pero ya con la respuesta, es decir, redacta el problema nuevamente, pero ya con la respuesta.
f. Verifica la razonabilidad de la solución.

En la tabla 6 presentamos una síntesis de las soluciones proporcionadas por los estudiantes para resolver el problema 5.

Tabla 6. Cantidad de estudiantes que resolvieron el problema 5

| | HAY EVIDENCIA | NO HAY EVIDENCIA | NO DECIDO |
|---|---|---|---|
| Restablezca el problema en sus propias palabras | 6 | 1 | 20 |
| Ubique todos los datos por separado, hágalos explícitos | 6 | 17 | 4 |
| Encuentra subproblemas dentro del problema | 10 | 12 | 5 |
| Plantea un problema análogo más accesible | 1 | 16 | 10 |
| Redacta el problema nuevamente, pero ya con la respuesta | 0 | 14 | 13 |
| Verifica la razonabilidad de la solución | 1 | 17 | 9 |

*Análisis del problema 5*

a) Restablezca el problema en sus propias palabras. A continuación, mostramos ejemplos de algunas de las respuestas de los alumnos.

Respuesta del Alumno 1:

> Suponiendo un sistema aleatorio «de una ronda de un policía», que está hecho para que el policía pueda ir a cierto lugar en su ronda, 0, 1, 2, 3 veces, o sea y=0, 1, 2, 3, haciéndolo en periodos de media hora; aparte, este sistema

> lo arreglaron para que pase un promedio de 1 por periodo a la localidad. Si suponemos que y tiene una distribución de Poisson. Calcule la probabilidad de que el policía no pase por la localidad. ¿Cuál es la probabilidad de que la visite exactamente 1 vez? ¿Qué la visite 2 veces?, ¿y la probabilidad de que por lo menos la visite una vez?

Analizando la respuesta del Alumno 1, nos damos cuenta de que no hubo un cambio en la redacción que nos indique que el alumno lo hiciera propio.

Alumno 2:

> Que un policía pasa por ciertas localidades y puede pasar 1, 2, 3 veces cada media hora, y ese sistema está configurado para que este policía pasa por promedio 1 vez cada media hora. Calcule la probabilidad de que el policía no pase por alguna localidad en una media hora, ¿cuál es la probabilidad de que pase una vez?, ¿cuál es la probabilidad de que pase 2 veces en una media hora?, ¿cuál es la probabilidad que pase lo más veces?

Alumno 3:

> Este problema me pide encontrar la probabilidad de que un policía en el periodo dado no pase por alguna localidad. Y también la probabilidad de que la visite una vez, dos veces y al menos una vez.

Alumno 5:

> Un escuadrón de policía da rondas a algunas localidades en lapsos de media hora y estas rondas están programadas para que en promedio pase una vez por cada localidad en ese lapso. Calcular la probabilidad de que no visite alguna de estas localidades en el lapso de media hora, ¿cuál es la probabilidad de que la visite una vez?, ¿dos veces? ¿al menos una vez?

De las respuestas de los alumnos podemos observar la ausencia de argumentos y las dificultades para interpretar problemas; sólo en la respuesta del Alumno 3 percibimos claridad en lo solicitado.

En resumen, acerca del problema 5, tenemos la tabla 7:

Tabla 7. Tipos de argumentos presentados por los alumnos en la solución del problema 5

| Argumentos bien construidos | Argumentos deficientes | Ausencia de argumentos |
|---|---|---|
| 3 | 23 | 1 |

En la tabla 7 podemos constatar lo que hemos venido presentando a lo largo del trabajo en relación con la falta de argumentos de los estudiantes para explicar la aleatoriedad.

## Conclusiones

Coincidimos con Díaz y De la Fuente (2005) en que los problemas que hemos mostrado como ejemplos en el trabajo pueden usarse para diagnosticar las dificultades de los alumnos, incluso antes de la enseñanza del tema, pues el alumno puede llegar a la clase con intuiciones incorrectas en el campo de la probabilidad. Las soluciones erróneas de los alumnos pueden disminuir poniendo a funcionar didácticas que promuevan el pensamiento variacional o la noción de aleatoriedad, con ayuda de tablas de números aleatorios, calculadoras y software. Además, el uso de diferentes representaciones como frecuencias, árboles, o diagramas rectangulares, puede también contribuir a mejorar la enseñanza de la probabilidad.

## Referencias

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada, España: Grupo de Investigación en Educación Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Clemens, D. (2007). Curriculum research: toward a framework for research curricula. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(1).

Díaz, C.; I. De la Fuente (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística, y las estrategias empleadas por los alumnos. *Epsilon*, vol. 59.

Gigerenzer, G. (1994). Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice-versa). C. Díaz, I. De la Fuente, *Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística*. Epsilon, 2005.

Hines W.; D. Montgomery et al. (2006). *Probabilidad y estadística para ingeniería*. Tercera edición en español. Primera reimpresión 2006. CECSA.

Maury, S. (1985). Influence de la question dans una épreuve relative á la notion d'independance. *Educational Studies in Mathematics*, 16.

Maury, S. (1986). Contribution à l'étude didacique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problémes. Tesis doctoral. Universidad de Montpéllier II.

NCTM (2000). *Principles and Standard for School Mathematics*. NCTM.

Ojeda, A.M. (1995). Dificultades del alumno respecto a la probabilidad condicional. *UNO*, 5. C. Díaz, I. De la Fuente, *Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística*. Epsilon, 2005.

Ortiz, J.J.; N. Mohamed; C. Batanero (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. *X Simposio de SEIEM.* Huesca.

Pollatsek, A.; A. Well, D. Konold; P,Hardiman (1987). Understanding conditional probabilities. *Organitation, Behavior and Human Decision Processes,* 40.

Programa Sectorial de la Educación 2013-2018, https://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/4479/4/images/PROGRAMA_SECTORIAL_DE_EDUCACION_2013_2018_WEB.pdf (consultado el 20 de abril de 2016).

RIEMS. Reforma Integral de Educación Media Superior, http://www.sems.gob.mx/en_mx/sems/acuerdo_secretarial (20 de abril de 2016).

SEP (2011). Plan de Estudios, Educación Básica. Elaborado por personal académico de la Dirección General de Desarrollo Curricular, que pertenece a la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública. Cuautitlán Izcalli, Estado de México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuito.

SEP (2006). Educación básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2006. Elaborado por personal académico de la Dirección General de Desarrollo Curricular, que pertenece a la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública. Este programa está vigente en el actual sexenio.

SEP (2011). Acuerdo Número 592 por el que se Establece la Articulación de la Educación Básica. Cuautitlán Izcalli, Estado de México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuito.

Shaughnessy, J.M. (1992). Research in probability and statistics: reflections and directions. Ed. Douglas A. Grows. NCTM.

Shaughnessy, J.M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. Ed. Frank K. Lester, Jr. NCTM.

Tversky, A.; D. Kahneman (1982). Causal schemas in judgment under uncertainty. D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases.* Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Wild, C.J.; Pfannkuch (1999). Statical thinking in empirical enquiry. J. M. Shaughnessy, 2007. Research on statistics learning and reasoning, 957-1010. Ed. Frank K. Lester, Jr. NCTM.

www.sep.gob.mx, 15 de mayo de 2009.

**Síntesis curricular**

**Salvador Hernández Vaca**

Licenciado en Matemáticas por el Instituto Politécnico Nacional. Maestro en Educación, Campo Intervención Pedagógica y Aprendizaje Escolar por la Universidad Pedagógica Nacional. Doctor en Educación por la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Autónoma de Sinaloa. Investigador del Centro de Ciencias de Sinaloa y asesor del posgrado de la Universidad Pedagógica del Estado de Sinaloa. Área de investigación: Matemática Educativa en los temas de formación y desarrollo profesional docente.

**Correo**:
chavorin.shv@gmail.com